

Н.М. Иванов

**СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ
ПО ПЛАНИМЕТРИИ**



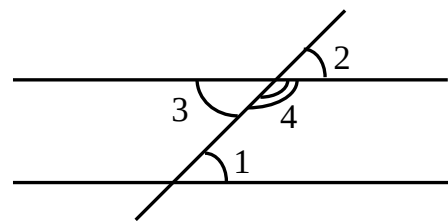
math100.ru
Баллов

Математика

ПЛАНИМЕТРИЯ

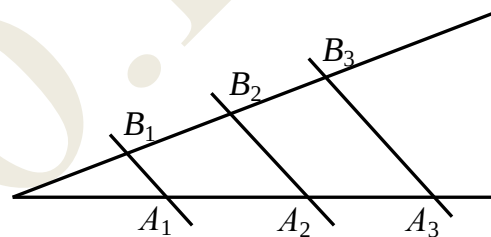
Свойства и признаки параллельных прямых

- 1) Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.
- 2) Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.
- 3) Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны (углы 1 и 3); соответственные углы равны (углы 1 и 2); вертикальные углы равны (углы 3 и 2); внутренние односторонние углы в сумме составляют 180° (углы 1 и 4).
- 4) Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
- 5) Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.
- 6) Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.



Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки ($A_1A_2 = A_2A_3$), то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне ($B_1B_2 = B_2B_3$).

Обобщенная теорема Фалеса. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.



ТРЕУГОЛЬНИК

Признаки равенства треугольников

- 1) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.
- 2) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.
- 3) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

- 1) По двум катетам.
- 2) По катету и гипотенузе.
- 3) По гипотенузе и острому углу.
- 4) По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

- 1) Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .
- 2) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.
- 3) Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.
- 4) Сумма внешних углов n -угольника равна 360° .
- 5) Угол между биссектрисами смежных углов равен 90° .
- 6) Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

- 1) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
- 2) Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.
- 3) В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

4) Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

- 1) Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.
- 2) Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.
- 3) Против большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона.
- 4) Против бо́льшей стороны треугольника лежит бо́льший угол.
- 5) Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
- 6) Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то
 - а) перпендикуляр короче наклонных;
 - б) бо́льшей наклонной соответствует бо́льшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника: отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника: средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется центром тяжести треугольника) и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника, $AM = 2MA_1$, $BM = 2MB_1$, $CM = 2MC_1$.

2) Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника (на треугольники с равными площадями), например, $S_{\triangle ABB_1} = S_{\triangle CBB_1}$.

3) Все медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников, т.е.

$$S_{\triangle AMB_1} = S_{\triangle AMC_1} = S_{\triangle BMC_1} = S_{\triangle BMA_1} = S_{\triangle CMA_1} = S_{\triangle CMB_1}.$$

4) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

5) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

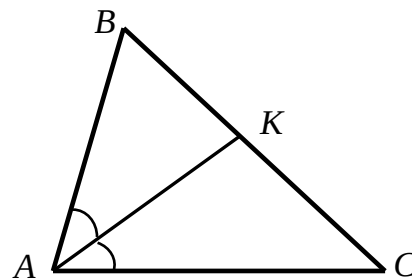
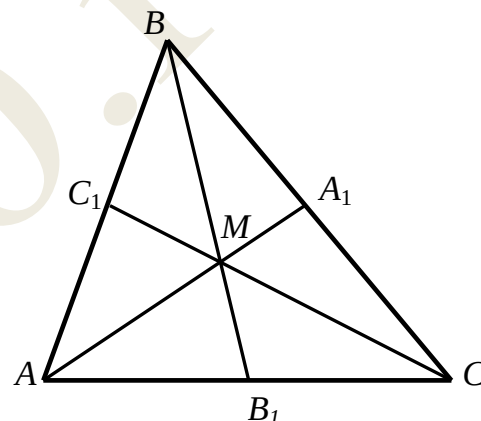
Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника: серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника: прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника: биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника: биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки,

пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$.



Длина биссектрисы треугольника находится по формуле $AK = \sqrt{AB \cdot AC - BK \cdot CK}$.

Признаки подобия треугольников

1) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

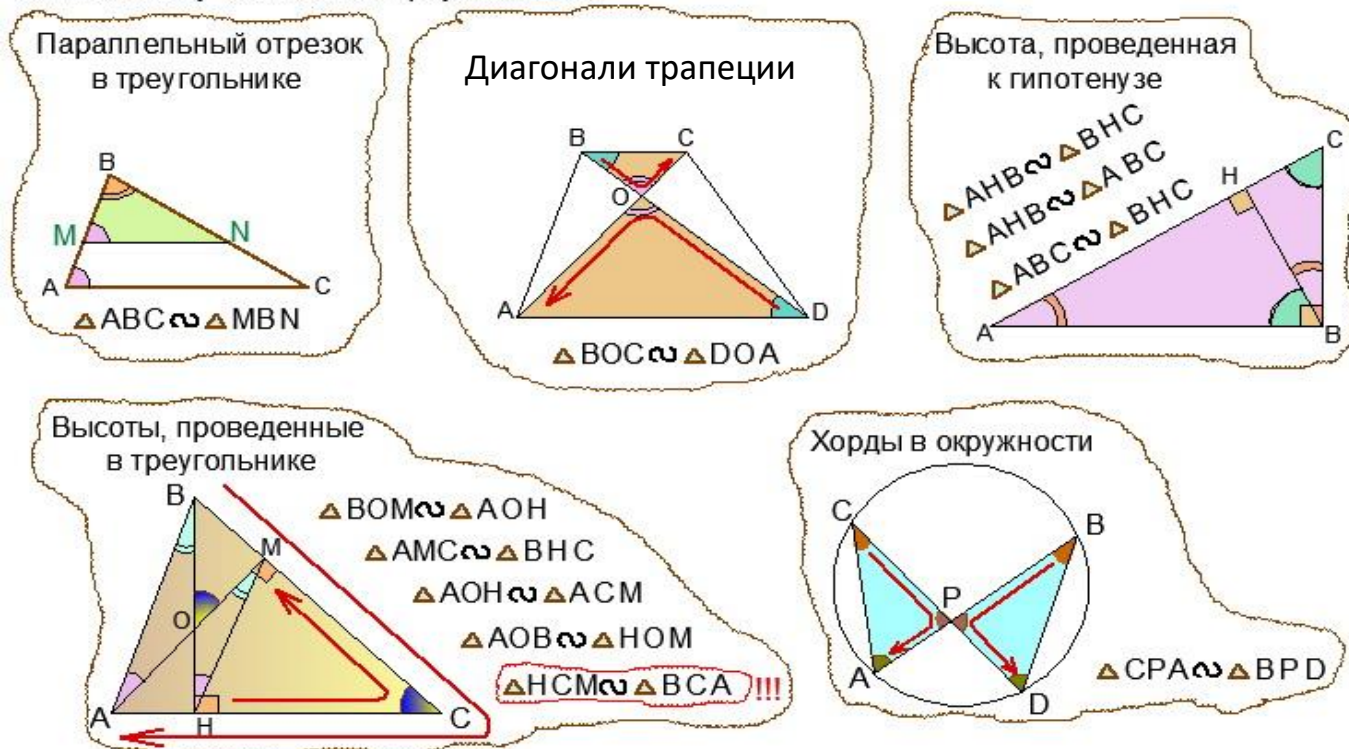
2) Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3) Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

- 1) Они имеют по равному острому углу.
- 2) Катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника.
- 3) Гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.

Типичные случаи подобия треугольников



Площади подобных треугольников: отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отношение сторон подобных треугольников равно отношению любых соответствующих линейных размеров.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

- 1) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов, т.е. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, где $\angle C = 90^\circ$.
- 2) Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник – прямоугольный.

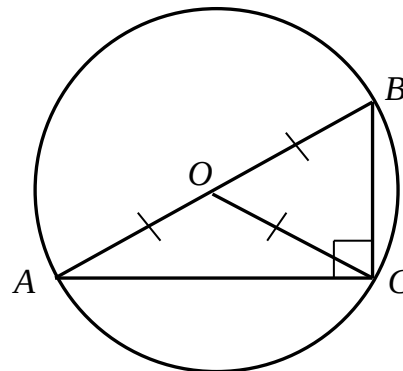
В прямоугольном треугольнике

- 1) Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.
- 2) Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.
- 3) Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему.
- 4) Котангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к противолежащему.
- 5) Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30° , равен половине гипотенузы.
- 6) Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

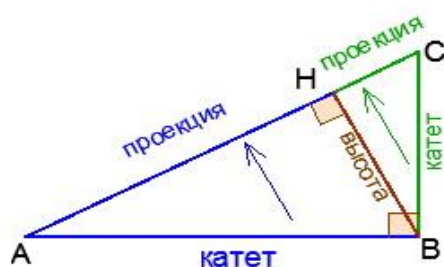
7) В прямоугольном треугольнике медиана проведенная к гипотенузе равна половине гипотенузы ($CO = BO = AO$) и разбивает треугольник на два равнобедренных треугольника AOC и BOC .

8) Центр окружности описанной вокруг прямоугольного треугольника находится на середине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b – катеты, а c – гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно; p – полупериметр треугольника.

9) В прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого, а тангенс соответственно котангенсу, т.е. $\sin A = \cos B$, $\cos A = \sin B$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$, $\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B$.



Подобие в прямоугольном треугольнике:



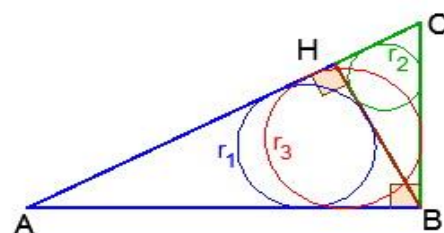
$$\triangle AHB \sim \triangle ABC \longrightarrow AB = \sqrt{AH \cdot AC}$$

проекция гипотенуза

$$\triangle ABC \sim \triangle BHC \longrightarrow BC = \sqrt{CH \cdot AC}$$

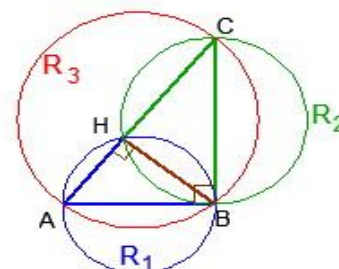
проекция гипотенуза

$$\triangle AHB \sim \triangle BHC \longrightarrow BH = \sqrt{AH \cdot CH}$$



$$r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$$

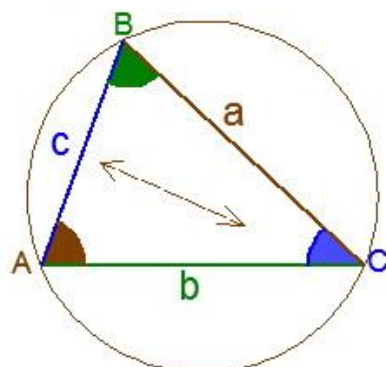
Интересные следствия
подобия в прямоугольном
треугольнике



$$R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$$

Теоремы синусов и косинусов:

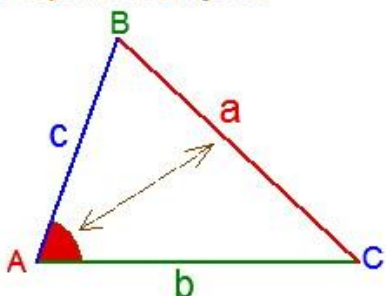
Теорема синусов:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R !!!$$

R – радиус описанной окружности

Теорема косинусов:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Как найти косинус угла в треугольнике:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Если $\cos A < 0 \Rightarrow \angle A$ – тупой

Следствие из теоремы косинусов: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где d_1 и d_2 диагонали параллелограмма, а a и b стороны параллелограмма.

Формула для медианы треугольника: если m_c – медиана треугольника, проведенная к стороне c , то $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b – остальные стороны треугольника.

Формулы площади треугольника

1) Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, т.е. $S = \frac{1}{2}ah$.

2) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, т.е.

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

3) Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности, т.е.

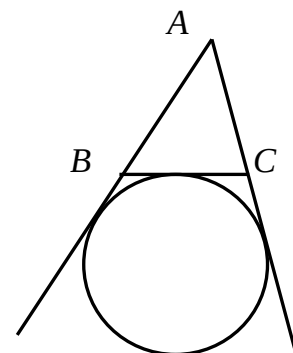
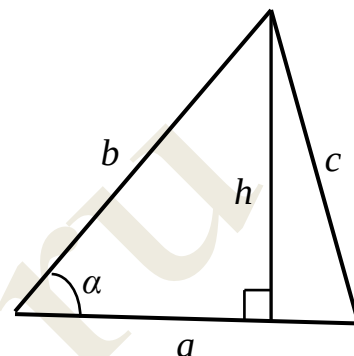
$$S = p r, \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ – полупериметр, а } r \text{ – радиус вписанной окружности.}$$

4) Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности, $S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности.

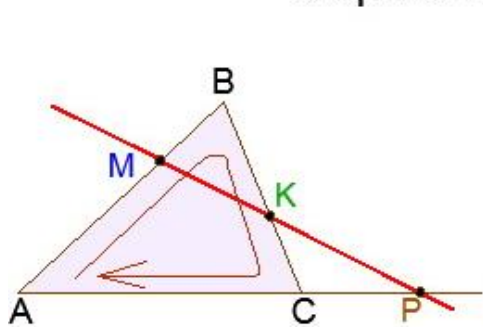
5) Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр.

Вневписанная окружность. Окружность называют окружностью, вневписанной в треугольник, или вневписанной окружностью, если она касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. У каждого треугольника существуют три вневписанных окружности. Центр вневписанной окружности, изображенной на рисунке, лежит в точке пересечения биссектрисы внутреннего угла A и двух биссектрис внешних углов B и C , а окружность касается стороны BC . Радиус вневписанной окружности,

касающейся стороны BC , вычисляется по формуле $r = \frac{S}{p - BC}$, где S – площадь треугольника ABC , а p – его полупериметр.

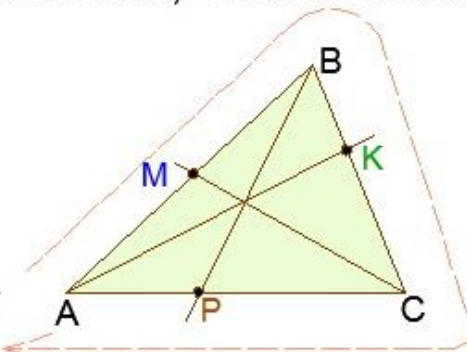


Теорема Менелая, Чевы и Птолемея:



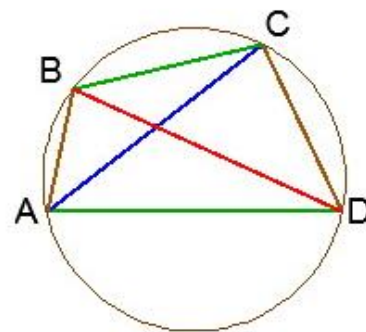
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

теорема Менелая



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

теорема Чевы



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

теорема Птолемея

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

- 1) Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
- 2) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
- 3) Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
- 4) Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
- 5) Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
- 6) Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
- 7) Если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Свойство середин сторон четырехугольника. Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырехугольника.

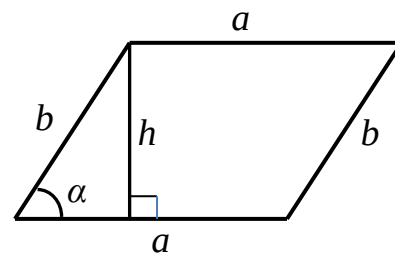
Формулы площади параллелограмма

1) Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне, т.е. $S = ah$.

2) Площадь параллелограмма равна произведению двух смежных сторон на синус угла между ними, т.е.

$$S = ab \sin \alpha.$$

3) Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, т.е.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$


Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Площадь прямоугольника равна произведению двух смежных сторон.

Свойства и признаки прямоугольника

- 1) Диагонали прямоугольника равны.
- 2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырехугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба

- 1) Диагонали ромба перпендикулярны.
- 2) Диагонали ромба делят его углы пополам.
- 3) Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.
- 4) Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб.

Формулы площади ромба

1) Площадь ромба равна произведению стороны на высоту, т.е. $S = ah$.

2) Площадь ромба равна произведению двух сторон на синус угла между ними, т.е.

$$S = a^2 \sin \alpha.$$

3) Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон). Трапеция, у которой боковые стороны равны, но не параллельны, называется равнобедренной или равнобокой.

Теорема о средней линии трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Свойства трапеции

1) Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника с общей вершиной. Площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны: $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle DCO}$.

2) В любой трапеции с непараллельными боковыми сторонами середины оснований (точки M и N), точка пересечения диагоналей (точка O) и точка пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны (точка K), лежат на одной прямой.

3) В равнобокой трапеции углы при основании равны.

4) В равнобокой трапеции диагонали равны.

5) В равнобокой трапеции высота BH , опущенная на большее основание AD из конца меньшего основания BC , делит его на два отрезка, один из которых равен полуразности оснований $AH = \frac{AD - BC}{2}$, а другой их полусумме

$DH = \frac{AD + BC}{2}$, (т.е. средней линии трапеции).

6) Во всякой трапеции середины боковых сторон и середины диагоналей лежат на одной прямой.

7) Во всякой трапеции с непараллельными боковыми сторонами отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.

8) Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

9) Трапецию можно описать около окружности тогда и только тогда, когда сумма оснований равна сумме боковых сторон.

10) Окружность, вписанная в равнобокую трапецию, касается оснований в их серединах.

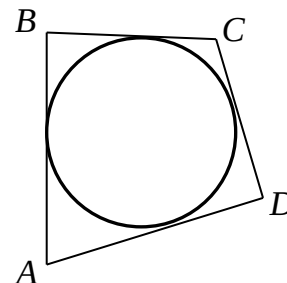
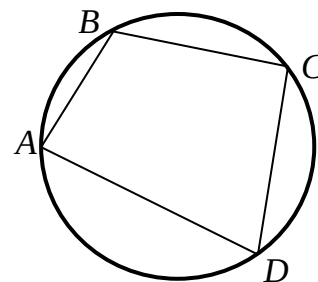
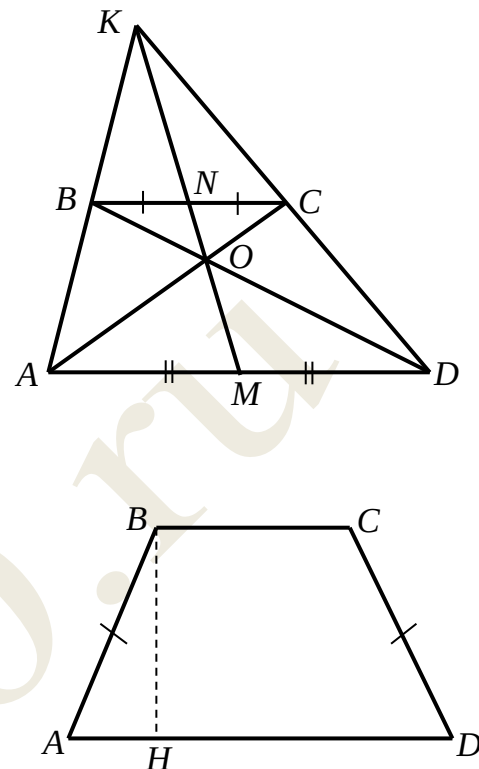
Формула площади трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, $S = \frac{a+b}{2}h$.

Если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма противоположных углов равна 180° , т.е. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$. Верно и обратное: если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм прямоугольник.

Если четырёхугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны, т.е. $AB + CD = BC + AD$. Верно и обратное: если в выпуклом четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.



В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность:
 $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d – стороны этого четырёхугольника, p – полупериметр, а S – площадь.

МНОГОУГОЛЬНИКИ

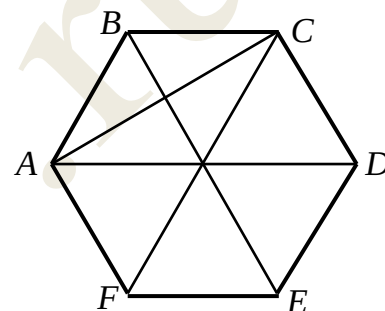
Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости.

Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь $S = pr$, где p – полупериметр многоугольника, а r – радиус вписанной окружности.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

Рассмотрим **правильный шестиугольник** $ABCDEF$: внутренние углы правильного шестиугольника равны 120° , поэтому диагонали AD, BE и CF разбивают шестиугольник на 6 равных равносторонних треугольников. Площадь шестиугольника равна площади одного из этих треугольников, умноженная на 6. Диагонали AD, BE и CF в два раза больше стороны шестиугольника. Диагональ AC перпендикулярна сторонам CD и AF , поэтому ее можно найти по теореме Пифагора из $\triangle ACD$ или $\triangle ACF$. Радиус описанной окружности равен стороне шестиугольника, а радиус вписанной окружности половине диагонали AC .



ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Окружностью называется множество всех точек плоскости, находящихся на равном положительном расстоянии от некоторой точки этой же плоскости. Эта точка называется **центром окружности**, а данное расстояние **радиусом окружности**.

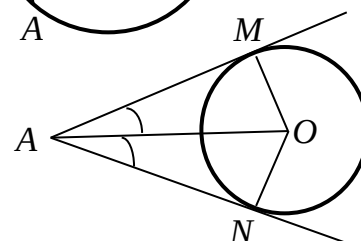
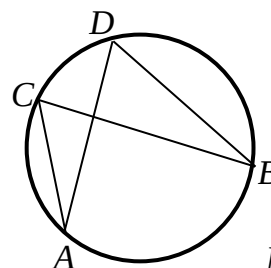
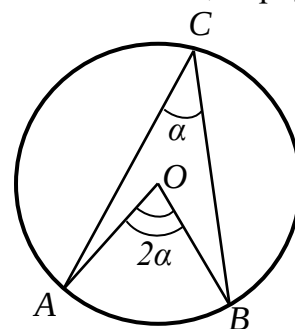
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен ей. Равные хорды окружности равноудалены от ее центра; равноудаленные от центра окружности хорды равны.

Центральным углом в окружности называется угол с вершиной в ее центре (это $\angle AOB$). Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, называется **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу. **Градусной мерой дуги** окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность** (это $\angle ACB$). Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла, т.е. $\angle AOB = 2\angle ACB$.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны ($\angle ACB = \angle ADB$).

Касательная к окружности: если из точки к окружности проведены две касательные, то длины отрезков от этой точки до точек касания равны ($AM = AN$) и прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, обладает свойством: $\angle MAO = \angle NAO$.



Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому к точке касания ($OA \perp AB$).

Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги стягиваемой этой хордой, т.е. $\angle AOC = 2\angle BAC$.

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

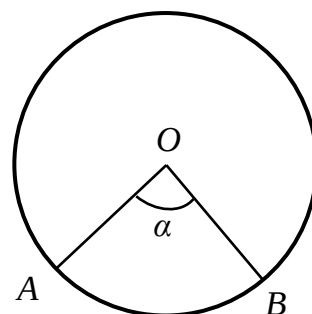
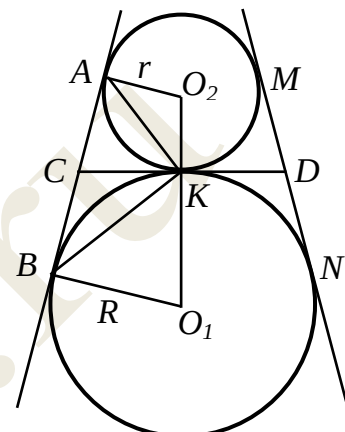
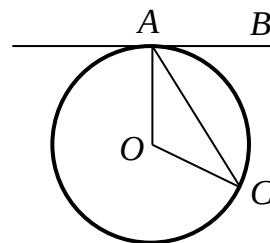
1) Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.

2) Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3) Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4) Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K , в точке C . Тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$ и $CA = CB = CK$.

5) Отрезок общей внешней касательной AB к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной CD , заключённому между общими внешними касательными и эти отрезки $AB = CD = MN = 2\sqrt{Rr}$.



Длина окружности радиуса R равна $L = 2\pi R$.

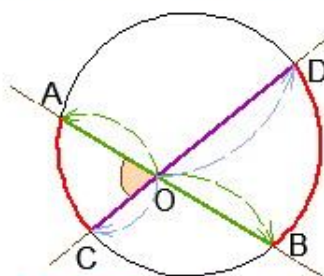
Площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$.

Длина дуги $L_{AB} = 2\pi R \frac{\alpha}{360}$.

Площадь сектора $S_{OAB} = \pi R^2 \frac{\alpha}{360}$.

Свойство отрезков секущих:

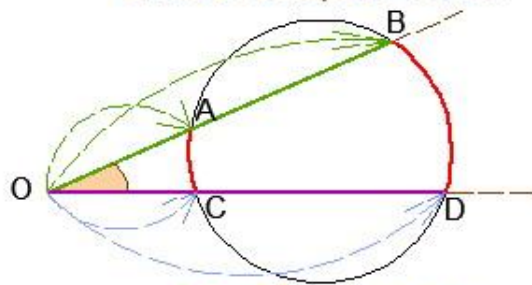
Внутреннее пересечение:



$$1) OC \cdot OD = OA \cdot OB$$

$$2) \angle AOC = \frac{\text{дуга } BD + \text{дуга } AC}{2}$$

Внешнее пересечение:



$$1) OC \cdot OD = OA \cdot OB$$

$$2) \angle AOC = \frac{\text{дуга } BD - \text{дуга } AC}{2}$$

Свойство квадрата отрезка касательной:



$$1) OC^2 = OA \cdot OB$$

$$2) \angle AOC = \frac{\text{дуга } BC - \text{дуга } AC}{2}$$

квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей

угол между касательной и секущей